Premis

En el darrer número de la *SCM/Notícies* ja vam informar del premi Abel 2013 al professor Pierre Deligne de l'Institut d'Estudis Avançats de Princenton, Nova York «per les seves contribucions fonamentals a la geometria algebraica i pel seu impacte transformador en la teoria de nombres, teoria de representacions, i camps relacionats».

Així mateix, us dèiem que en el proper número miraríem de trobar algun company que fes una ressenya al voltant del treball del guardonat. Feliçment, la professora Pilar Bayer, catedràtica del Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona, ha acceptat i ha escrit un article en què fa un repàs exhaustiu del treball del professor Deligne en un format adient per al lector de la *SCM/Notícies*.

Premi Abel 2013 per a Pierre Deligne

El dia 20 de març d'enguany, la presidenta de l'Acadèmia Noruega de les Ciències i de les Lletres, la jurista Kirsti Ström Bull, anunciava —en noruec i en anglès— la decisió de l'Acadèmia d'atorgar el premi Abel 2013 al matemàtic Pierre Deligne «pel caràcter seminal de les seves contribucions a la geometria algebraica i l'impacte transformador d'aquestes en teoria de nombres, en teoria de representacions i en camps relacionats».

En la seva onzena edició, el comitè avaluador del premi Abel estigué integrat per la presidenta Ragni Piene, professora de la Universitat d'Oslo, i pels vocals Gang Tian, professor de les universitats de Princeton i de Pequín; Stanislav Smirnov, professor de la Universitat de Ginebra i medalla Fields 2010; Maria J. Esteban, investigadora del CEREMADE, París, i Cédric Villani, professor de la Universitat de Lió, director de l'Institut Henri Poincaré i medalla Fields 2010.

En una breu intervenció, la presidenta del comitè sintetitzà tot seguit la influència, tant en geometria algebraica com en el conjunt de la matemàtica en general, dels potents conceptes forjats per Deligne, de les seves idees, dels seus resultats i dels seus mètodes. Piene remarcà la importància de la prova de Deligne de la hipòtesi de Riemann per a les varietats definides sobre cossos finits (la darrera de les conjectures de Weil en ser provada) [10], [13]; així com també les seves notables contribucions a la creació d'una teoria de Hodge mixta [7], [8], [11]; el seu treball, conjunt amb Mumford, sobre *stacks* algebraics i la compactificació de l'espai de moduli de les corbes estables [15]; el seu treball, conjunt amb Beilinson, Bernstein i Gabber, sobre feixos perversos (cf. [4]), i l'aplicació d'aquests a l'estudi de la correspondència de Riemann-Hilbert (cf. [6]).

En el mateix acte de l'anunci del premi, el professor de la Universitat de Cambridge i medalla Fields 1998, Sir Thimoty Gowers, va fer una dissertació sobre el lligam entre la hipòtesi de Riemann per a les varietats definides sobre cossos finits i la cèlebre conjectura de Ramanujan sobre l'ordre de magnitud de $\tau(n)$. Recordem que la funció τ es defineix per la igualtat

$$q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}=\sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n.$$

Ramanujan conjecturà que $|\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$, per a tot primer p, o bé, equivalentment per les propietats de la funció τ, que $|\tau(n)|\leq n^{11/2}d(n)$, on $d(n)$ denota el nombre de divisors de n. Gowers remarcà que precisament en el lligam —sospitat per Weil i per Serre— entre les conjectures de Weil i l'acotació del mòdul dels

coeficients de formes automorfes (conjectura de Ramanujan-Petersson) es troba un dels motors que incentivà l'estudi de les conjectures de Weil (cf. [2]).

El rei Harald V de Noruega lliurà el premi Abel 2013 a Deligne en el transcurs d'una cerimònia solemne celebrada a la Universitat d'Oslo el 21 de maig.

Pierre Deligne i el rei Harald V de Noruega.

L'endemà de la cerimònia s'impartiren les consuetudinàries *lliçons Abel*, adreçades a un públic científic general. El guardonat impartí la lliçó «Hidden symmetries of algebraic varieties». Els conferenciants invitats foren Nicholas Katz (professor de la Universitat de Princeton), que impartí la lliçó «Life over finite fields»; Claire Voisin (professora de l'Escola Politècnica de París i investigadora del CNRS), que exposà el tema «Mixed Hodge structures and the topology of algebraic varieties»; i Ravi Vakil (professor de la Universitat de Stanford) que parlà d'«Algebraic geometry and the ongoing unification of mathematics». Els vídeos d'aquestes lliçons es poden consultar a `http://www.abelprize.no/artikkel/vis.html?tid=58083`.

Apunt biogràfic de Deligne

Nascut a Etterbeek, Bèlgica, l'any 1944, Pierre Deligne és una figura innegable de la matemàtica actual. La seva obra ha contribuït de manera decisiva a la resolució de problemes oberts importants i al desenvolupament de tècniques sofisticades que han esdevingut cada cop més habituals i més universals en els nostres dies.

Format sota la direcció d'Alexander Grothendieck, es doctorà l'any 1972 amb una tesi titulada *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*. Ha estat investigador de l'Institut d'Estudis Científics Superiors, Bures-sur-Ivette, França[1] (del 1968 al 1984), i de l'Institut d'Estudis Avançats, Princeton, Nova Jersey (del 1984 fins avui).

Els resultats de Deligne sobre funcions zeta, funcions L, espais de moduli, representacions ℓ-àdiques, teoria de Hodge i motius són àmpliament treballats per la comunitat matemàtica i han contribuït en gran mesura a forjar els trets principals del programa de Langlands.

La carrera investigadora de Deligne s'ha desenvolupat amb dedicació total a la recerca, a l'IHES i a l'IAS, tal com hem dit. Per tant, Deligne no ha estat mai un professor universitari en el sentit més usual del terme; és a dir, amb dedicació a la recerca i, alhora, a la docència. Segons el Genealogy Project ha dirigit una tesi doctoral: a Michael Rapoport (1972), i n'ha codirigit dues més: a Lê Düng Tráng (1971) i a Miles Reid (1976).

A banda de les aportacions pròpies o amb col·laboradors, com les que hem recordat més amunt, en la seva obra s'hi troben també nombroses exposicions fetes al Seminari Bourbaki sobre resultats d'altres autors. Aquestes intervencions han estat sempre molt útils, atès que sol aportar-hi la seva visió particular —sempre enriquidora i, a voltes, desconcertant.

Deligne ha estat guardonat amb nombroses distincions, entre les quals sobresurt la medalla Fields, aconseguida l'any 1978. No esmentaré la resta dels seus premis perquè tal com ell diu que va aprendre de Grothendieck «les matemàtiques no són un esport de competició». Bona part del seu èxit professional l'atribueix al fet d'haver seguit al peu de la lletra un consell que li donà quan ell era estudiant el seu mestre a la Universitat de Brussel·les, Jacques Tits:[2] «fes sempre allò que t'agradi».

Qualsevol persona que s'hagi apropat als treballs de Deligne sap el temps i la dedicació que requereixen la seva lectura i comprensió. En aquesta nota, escrita per encàrrec exprés de l'editor de la *SCM/Notícies*, em centraré en

[1] Per al públic lector més jove, recordarem que l'IHES és un institut dedicat en exclusiva a la recerca, que es fundà a França l'any 1958, i del qual Jean Dieudonné i Alexander Grothendieck foren els primers professors permanents.

[2] J. Tits i J. G. Thompson foren guardonats amb el premi Abel 2008.

el treball de Deligne sobre les conjectures de Weil. Penso que això pot ser un tast suficient per apropar-nos a l'obra d'aquest matemàtic singular.

Les conjectures de Weil

En ocasions diverses, autors clàssics com ara Gauss, Jacobi, Lebesgue, així com també Hardy i Littlewood, s'havien trobat en la necessitat d'avaluar exactament, o bé d'estimar, el nombre de solucions d'equacions de congruència. D'entrada, es tracta d'equacions o de sistemes d'equacions polinòmiques de coeficients en cossos $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on p denota un nombre primer. En la seva tesi de l'any 1924 [1], Emil Artin havia observat que les congruències superiors en sentit de Dedekind podien interpretar-se de manera semblant en considerar cossos finits, $\mathbb{F}_q$, de $q = p^n$ elements. Aquests cossos també descriuen classes de residus, però de la forma $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}_K/\mathfrak{p}\mathbb{Z}_K$, on K és un cos de nombres, és a dir, una extensió finita del cos $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals, $\mathbb{Z}_K$ és el seu anell d'enters, i $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}_K$ és un ideal primer de norma q (com que $\mathbb{Z}_K$ és un anell de dimensió 1, $\mathfrak{p}$ és, alhora, un ideal maximal).

Tot limitant-se al cas de les extensions quadràtiques K d'un cos de funcions racionals $\mathbb{F}_q(T)$, Artin desenvolupà una teoria d'ideals en paral·lel a la teoria de Dedekind per als cossos de nombres i introduí l'anàleg de la funció zeta de Riemann i de Dedekind:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1},$$

on $\mathfrak{a}$ descriu el conjunt dels ideals enters no nuls, $\mathfrak{p}$ el dels ideals primers no nuls i N en designa la norma. Artin demostrà que aquesta funció tenia propietats anàlogues a les de les funcions zeta dels cossos de nombres: satisfeia una equació funcional i presentava una absència de zeros sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = 1$. A més, es tractava d'una funció meromorfa molt més senzilla que les funcions zeta esmentades atès que era una funció racional en la variable $t = q^{-s}$.

Amb posterioritat, F. K. Schmidt observà que era possible generalitzar els teoremes d'Artin per a qualsevol extensió finita K del cos $\mathbb{F}_q(T)$ i s'adonà que els problemes adquirien una formulació molt més natural en considerar els resultats d'Artin des d'una òptica geomètrica i substituir la noció d'ideal per la de divisor. El cos K passà així a interpretar-se com el cos de les funcions racionals d'una corba X, irreductible i llisa, definida per equacions polinòmiques de coeficients en el cos $\mathbb{F}_q$. Se suposa, a més, que la corba està immersa en un espai projectiu $\mathbb{P}_N$ sobre un domini universal de característica p, que es pot interpretar com una clausura algebraica $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. La funció zeta d'aquesta corba s'introdueix per la fórmula

$$\begin{aligned} Z(X|\mathbb{F}_q, t) &= \prod_{\mathfrak{p}} (1 - t^{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})})^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{N_n}{n} t^n\right), \end{aligned}$$

on $\mathfrak{p}$ descriu el conjunt dels divisors primers i $N_n = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$ denota el nombre de punts de la corba amb coordenades en l'única extensió $\mathbb{F}_{q^n} \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ de grau n sobre $\mathbb{F}_q$.

L'estudi elaborat per Schmidt sobre la funció zeta és pioner en el de la geometria algebraica en característica p. Com a conseqüència del teorema de Riemann-Roch traslladat a aquest context, Schmidt pot demostrar la racionalitat de la funció zeta. Aquesta s'escriu com

$$Z(X|\mathbb{F}_q, t) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

on $P(t) = \prod_{i=1}^{2g}(1-\alpha_i t)$ és un polinomi de coeficients enters, de grau $2g$, essent g igual al gènere de la corba. A més, les seves arrels es permuten mitjançant l'aplicació $\alpha \mapsto q\alpha^{-1}$. En termes de la variable complexa s, aquest fet es tradueix en una equació funcional que lliga el comportament de la funció $\zeta(X|\mathbb{F}_q, s) = Z(X|\mathbb{F}_q, q^{-s})$ en els punts s i $1-s$.

L'anomenada *hipòtesi de Riemann* per a corbes sobre cossos finits, primerament formulada per Artin en la seva tesi, afirma que tots els zeros de la funció zeta es troben en la recta $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, o bé, de manera equivalent, que

$$|\alpha_i| = \sqrt{q}, \quad 1 \leq i \leq 2g.$$

En prendre logaritmes en la igualtat

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{N_n}{n} t^n\right) = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1-\alpha_i t)}{(1-t)(1-qt)}$$

s'obté que

$$N_n = 1 + q^n - \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i^n,$$

fórmula que es pot llegir com una llei de distribució de divisors primers de la corba en termes dels zeros de la funció zeta. Tal com va ser observat per primera vegada per Helmut Hasse, la hipòtesi de Riemann en el context que ens ocupa és equivalent aleshores a la desigualtat

$$|N_n - 1 - q^n| \leq 2\, g\, q^{n/2}.$$

D'aquesta manera es recuperaven els resultats clàssics d'estimació del nombre de solucions d'equacions de congruència obtingudes en el cas de corbes, $n = 1$ i $q = p$.

La validesa de la hipòtesi de Riemann per a corbes de gènere 1 definides sobre un cos $\mathbb{F}_q$ fou obtinguda per primera vegada per Hasse. En una primera demostració, Hasse elevava la corba definida en característica p, juntament amb el seu endomorfisme de Frobenius, F, a característica zero i allí emprava la teoria de la multiplicació complexa, tal com havia estat tractada per Max Deuring (cf. [3]). Recordem que F associa a cada punt $x = (x_i)$ de $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ el punt $x^q = (x_i^q)$.

En una segona demostració, Hasse feia ús de l'anell d'endomorfismes de la corba el·líptica. Deuring i Hasse s'adonaren que, a fi de poder estendre els resultats a corbes de gènere superior, calia desenvolupar una teoria de correspondències en característica p, independent, per tant, de la teoria de la integració utilitzada en el cas complex.

En una nota publicada en 1940 [32], André Weil donà indicacions per a una possible demostració de la hipòtesi de Riemann en el cas d'una corba de gènere qualsevol definida sobre un cos finit $\mathbb{F}_q$. La idea fonamental de Weil fou que el nombre N_n de punts de la corba, racionals sobre $\mathbb{F}_{q^n}$, era exactament el nombre d'intersecció $(F^n \cdot \Delta)$ de la correspondència de Frobenius amb la diagonal Δ de $X \times X$, observació que resulta de la generalització del petit teorema de Fermat.

En una memòria de l'any 1887 [22], Adolf Hurwitz havia establert per primera vegada la relació entre el nombre de punts fixos d'una correspondència C d'una corba *complexa* X, projectiva i no singular, i la traça s de la matriu que expressa, fixada una base, l'acció de C sobre l'homologia $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. En interpretar la correspondència com un divisor de la superfície $X \times X$, Hurwitz havia obtingut la fórmula

$$s(C) = m_1(C) + m_2(C) - (C \cdot \Delta),$$

on, si designem per ξ un punt genèric de X, és

$$m_1(C) = (C \cdot (\xi \times X)), \quad m_2(C) = (C \cdot (X \times \xi)).$$

Aquesta fórmula es pot interpretar com un cas particular de la fórmula dels punts fixos de Lefschetz, però cal tenir present que el treball de Hurwitz és molt anterior al de Lefschetz.

Weil observà que, de poder procedir en característica p tal com ho feia Hurwitz en el cas complex, i en prendre $C = F$, s'obtindria que

$$s(F^n) = 1 + q^n - N_n, \qquad \text{per a tot } n \geq 1.$$

Siguin ara a, b enters arbitraris i ξ la classe de la correspondència definida per $a\Delta + bF^n$. De poder-se aplicar un anàleg d'una relació fonamental satisfeta pels períodes de les integrals abelianes en el cas de les superfícies de Riemann (teorema de Castelnuovo), el producte de la classe de ξ per la classe de la correspondència inversa ξ' satisfaria que

$$s(\xi\xi') \geq 0.$$

D'aquesta desigualtat, Weil deduí que

$$|N_n - q^n - 1| \leq 2gq^{n/2},$$

essent g el gènere de X. De fet, Weil procedeix de la manera següent: empra els punts d'ordre finit i primer amb p de la jacobiana de la corba com un substitut del primer grup d'homologia de la corba. Interpreta les correspondències com a endomorfismes de la jacobiana. Associa a cada correspondència una matriu $2g \times 2g$ (ℓ-àdica, amb $\ell \neq p$) i calcula la seva traça, d'acord amb Hurwitz, en termes del nombre de punts fixos d'aquesta correspondència. Amb relació a aquest treball (gestat en bona part a la presó), Weil comenta en les seves obres: «En d'autres circonstances, une publication m'aurait paru bien prématurée. Mais, en avril 1940, pouvait-on se croire assuré du lendemain? Il me sembla que mes idées contenaient assez de substance pour ne pas mériter d'être en danger de se perdre».

El desig de disposar d'una teoria de correspondències vàlida en qualsevol característica conduí Weil a l'elaboració, entre 1942 i 1946, del seus *Foundations of algebraic geometry* [33]. D'aquesta manera, en els volums [34] i [35], aconseguí desenvolupar una teoria de varietats abelianes vàlida en qualsevol característica i obtingué la demostració de la hipòtesi de Riemann per a una corba $X|\mathbb{F}_q$ de gènere qualsevol.

L'any 1949, en el treball [36], i després dels seus resultats sobre la hipòtesi de Riemann per a corbes i de les seves recerques sobre varietats abelianes, Weil formulà les avui conegudes com a *conjectures de Weil*. El seu propòsit fou estendre a les varietats algebraiques $X|\mathbb{F}_q$ de dimensió superior els resultats que havia provat per a la funció zeta de les corbes i per a les varietats abelianes.

Anàlogament al cas de dimensió 1, la funció zeta d'una varietat $X|\mathbb{F}_q$ de dimensió d es defineix segons

$$\begin{aligned} Z(X|\mathbb{F}_q, t) &= \prod_{x\in|X|} (1 - t^{\deg(x)})^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{N_n}{n} t^n\right), \end{aligned}$$

on $|X|$ denota el conjunt dels punts geomètrics de X, $N_n = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$ i $\zeta_X(s) := Z(X|\mathbb{F}_q, q^{-s})$. Weil formulà les afirmacions següents:

1. La funció $Z(X|\mathbb{F}_q, t)$ és una *funció racional* de t. Més precisament, es pot escriure en forma de producte alternat

$$Z(X|\mathbb{F}_q, t) = \frac{P_1(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2d}(t)},$$

on cada $P_i(t) = \prod_j^{b_i}(1 - \alpha_{ij}t)$ és un polinomi de coeficients enters, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$, $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$. A més, se satisfà que $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$ per a tot i, j. Aquest darrer fet és el conegut com a *hipòtesi de Riemann* per a les varietats sobre cossos finits.

2. La funció zeta satisfà una *equació funcional* de la forma

$$Z(X|\mathbb{F}_q, q^{-d}t^{-1}) = \varepsilon q^{\frac{d\chi(X)}{2}} t^{\chi(X)} Z(X, t),$$

on $\varepsilon = \pm 1$ i $\chi(X)$ és la característica d'Euler-Poincaré de X. A més, l'aplicació $\alpha \mapsto q^d/\alpha$ transforma $\alpha_{i,j}$ en $\alpha_{2d-i,j}$.

3. Si X s'obté per bona reducció en p d'una varietat projectiva i no singular Y definida sobre un cos de nombres $K \subset \mathbb{C}$, aleshores el grau del polinomi P_i coincideix amb l'i-èsim *nombre de Betti* de l'espai topològic $Y(\mathbb{C})$.

En l'article esmentat, Weil veu que les seves afirmacions són certes en el cas de les varietats grassmannianes $Gr_{m,r}$. Al mateix temps, proporciona un raonament heurístic al seu favor basat en la hipotètica existència d'una bona cohomologia per a les varietats considerades. Es tractava d'una cohomologia en què fossin vàlides les eines topològic-algebraiques emprades per Solomon Lefschetz en el cas de les varietats algebraiques complexes. La recerca de la dita *cohomologia de Weil* fou el motor principal que impulsà el desenvolupament de la geometria algebraica entre els anys 1949 i 1973, per part de Grothendieck i els seus col·laboradors. Es tractava, ni més ni menys, de procedir a l'estudi de conjunts finits, definits per polinomis de coeficients en cossos finits, per mètodes cohomològics provinents de la topologia, sense que aquesta estigués condemnada a ser la topologia discreta i dependre en exclusiva de mètodes combinatoris. La idea principal l'aportaria la *topologia étale* dels esquemes introduïda per Grothendieck en la qual, recollint la idea d'espai recobridor, els oberts ja no són necessàriament subconjunts de l'espai de partida.

En aquest procés de traslladar els mètodes topològics a la geometria algebraica en qualsevol característica, l'*Analysis situs* [26] de Lefschetz, continuador de l'*Analysis situs* de Poincaré, jugaria un paper fonamental. Lefschetz, a qui en les seves pròpies paraules «li havia correspost clavar l'arpó de la topologia algebraica en el cos de la balena de la geometria algebraica», segurament no preveié que la seva monografia de l'any 1924 esdevindria, vint-i-cinc anys després, el quadern de bitàcola dels que calarien les xarxes en la captura de les espècies autòctones, en característica p.

Aportacions prèvies de Grothendieck

La cohomologia *étale* d'esquemes fou desenvolupada per Grothendieck, Artin i col·laboradors en els anys seixanta. Els seus resultats principals es troben en les 2544 + XLVII pàgines que constitueixen els volums SGA 4 i SGA 7 [20], [21]. A partir dels grups de cohomologia *étale* dels esquemes es construeixen els grups de cohomologia ℓ-àdica, els quals, en el cas de les varietats projectives i no singulars definides sobre un cos finit, satisfan les propietats que permeten una demostració cohomològica de les conjectures de Weil. En el volum SGA $4\frac{1}{2}$, publicat el 1977, Deligne proporcionà una presentació

més compacta del tema, suficient per a la prova de les conjectures de Weil. En particular, en aquest volum s'hi troba una demostració directa de la fórmula de les traces de Lefschetz per a l'endomorfisme de Frobenius actuant en els grups de cohomologia d'un feix ℓ-àdic definit en una varietat sobre un cos finit.

La cohomologia ℓ-àdica fou emprada també per Deligne i Lustzig [14] en la construcció de representacions dels grups finits $G(\mathbb{F}_q)$ formats pels punts $\mathbb{F}_q$-racionals d'un grup algebraic G connex i reductiu definit sobre un cos finit $\mathbb{F}_q$.

Donats un esquema noetherià X i un nombre primer ℓ, un feix ℓ-àdic sobre X_{et} és, per definició, un sistema projectiu $F = (F_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}$-feixos construïbles sobre X_{et} de manera que, per a cada n, el morfisme de transició proporciona un isomorfisme

$$F_n \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} F_{n-1}.$$

El caràcter construïble dels feixos F_n garanteix que les fibres $F_{\overline{x}} = \varprojlim F_{n,\overline{x}}$, en cada punt geomètric $\overline{x} \to X$, són $\mathbb{Z}_\ell$-mòduls finitament generats, on $\mathbb{Z}_\ell$ denota l'anell dels enters ℓ-àdics.

Quan cada feix *étale* F_n és localment constant, es diu que el feix ℓ-àdic F és localment constant. Els feixos F localment constants esdevenen constants en un recobriment universal $\pi\colon \widetilde{X}_{et} \to X$. Quan X és connex, el functor

$$F \to F(\widetilde{X}) := \varprojlim F_n(\widetilde{X}),$$

que associa a cada feix el conjunt de les seves seccions globals, estableix una equivalència entre la categoria dels feixos localment constants sobre X_{et} i la categoria dels $\mathbb{Z}_\ell$-mòduls finitament generats dotats d'una operació contínua del grup fonamental $\pi_1(\widetilde{X}, \overline{x}) := \mathrm{Aut}_X(\widetilde{X})$. Estem, doncs, en el context de representacions ℓ-àdiques d'uns grups que, en general, no són finits.

Els grups de cohomologia ℓ-àdica de X_{et} amb valors en $F = (F_n)_{n\geq 0}$ es defineixen per les fórmules

$$H^i(X, F \otimes \mathbb{Q}_\ell) := \varprojlim H^i(X, F_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

i resulten ser, en el cas en què X és un esquema propi definit sobre un cos k algebraicament tancat, $\mathbb{Q}_\ell$-espais vectorials de dimensió finita.

Siguin ara X_0 un esquema de tipus finit sobre $\mathbb{F}_q$, $|X_0|$ el conjunt dels seus punts tancats i, per a un $x \in |X_0|$, sigui $\mathrm{gr}(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ el seu grau residual. Per a tot feix ℓ-àdic $\mathcal{F}_0$ sobre $X_{0,et}$, Grothendieck definí la funció L de X_0 respecte del feix $\mathcal{F}_0$ per la fórmula

$$L(X_0, \mathcal{F}_0) = \prod_{x\in|X_0|} \det(1 - F_{\overline{x}}^* t^{\mathrm{gr}(x)}; \mathcal{F}_{\overline{x}} \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{-1}.$$

Quan $\mathcal{F}_0$ és el feix constant $(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})_{n\geq 0}$, els termes que figuren en els denominadors són, simplement, $1 - t^{\mathrm{gr}(x)}$, amb la qual cosa, la funció L coincideix aleshores amb la funció zeta de Hasse-Weil de l'esquema X_0.

Sigui ara $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ l'esquema obtingut per canvi de base. La fórmula de Lefschetz en aquest context expressa el nombre de punts fixos de l'automorfisme de Frobenius en termes de la suma alternada de les traces de les aplicacions lineals induïdes sobre la cohomologia ℓ-àdica:

$$\sum_{x\in X^{F^n}} \mathrm{Tr}(F_x^{*n}, \mathcal{F}_x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^{*n}, H_c{}^i(X, \mathcal{F})).$$

A partir d'aquesta fórmula, tal com ho féu Weil en el seu raonament heurístic, es dedueix fàcilment la racionalitat de la funció L:

$$L(X_0, \mathcal{F}_0) = \prod_i \det(1 - F^* t; H_c^i(X, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}.$$

Aquesta va ser la demostració donada per Grothendieck de la racionalitat de la funció zeta, que forma part de la primera de les conjectures de Weil, i de les funcions L que la generalitzen.

La demostració de la segona de les conjectures, que fa referència a l'equació funcional satisfeta per la funció zeta, resulta del teorema de dualitat de Poincaré en cohomologia ℓ-àdica, que fou establert així mateix per Grothendieck.

L'afirmació de la tercera conjectura de Weil (valor correcte dels nombres de Betti) s'obté a partir del teorema de comparació en cohomologia ℓ-àdica: si X és un esquema propi i llis definit sobre $\mathbb{Q}$, i $\mathbb{Z}_{\ell,X} = (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})_X$, es té un isomorfisme canònic

$$H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell,$$

per a tot $i \geq 0$.

L'any 1960, amb anterioritat al desenvolupament de la cohomologia ℓ-àdica d'esquemes, Serre havia formulat i demostrat un anàleg de les conjectures de Weil per a varietats kählerianes. La demostració de Serre en aquella ocasió

feia un ús essencial del teorema de l'índex de Hodge (provat per Hodge mitjançant mètodes topològics, introduïts per Lefschetz). Inspirat pel treball de Serre, l'any 1968 Grothendieck formulà una sèrie de conjectures conegudes com a *conjectures estàndard*, orientades a transportar al context de la cohomologia ℓ-àdica les propietats conegudes en el cas de la cohomologia de les varietats kählerianes, via la teoria de Hodge. El caràcter positiu d'una determinada forma bilineal

$$(\xi, \eta) = (-1)^i (L^{n-2i}(\xi).\eta),$$

definida sobre la part primitiva de la cohomologia $H^{2i}(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$, postulat per una de les conjectures estàndard, era l'anàleg ℓ-àdic del teorema de Castelnuovo que hem esmentat.

Les conjectures estàndard de Grothendieck foren exposades per Kleiman en el llibre [23]. S'hi prova, a més, que aquestes conjectures impliquen les conjectures de Weil. La demostració d'aquests fets és deguda a Lieberman, Lubkin i Bombieri.

L'aportació de Deligne a les conjectures de Weil

La demostració de Deligne de la hipòtesi de Riemann per a varietats sobre cossos finits aparegué l'any 1974 en una de les publications de l'IHES i constitueix el treball *La conjecture de Weil I* [10].

Es pot dir que l'article de Deligne [10] fou un dels primers treballs de «gran impacte» en teoria de nombres, com ho serien després el treball de Mazur [27], sobre els punts de torsió de les corbes el·líptiques racionals; de Faltings [18], sobre les conjectures de Tate, de Mordell i de Shafarevich; de Mazur-Wiles [28], sobre la conjectura principal de la teoria d'Iwasawa; de Gross-Zagier [19], sobre la conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer en el cas de zeros simples; i de Wiles [37], sobre el darrer teorema de Fermat. Es tracta de treballs profunds caracteritzats tots ells pel fet que s'hi resolen problemes llargament oberts mitjançant una hàbil combinació d'idees noves i de tècniques de darrera generació que acumulen, però, una dilatada experiència prèvia.

En el cas particular que ens ocupa, l'originalitat de les idees de Deligne se sumava a l'experiència de més de quinze anys del treball en geometria algebraica desenvolupat per l'escola de Grothendieck.

Amb posterioritat, l'any 1977, Deligne publicà el llibre SGA $4\frac{1}{2}$, [12], principalment per demostrar la denominada fórmula de Lefschetz, i a fi de satisfer exigències de rigor per part de la comunitat matemàtica. En el treball [13], ampliaria i milloraria l'article primer sobre el tema.

El mèrit principal de Deligne en relació amb les conjectures de Weil rau en el fet que, l'any 1974 [10], aconseguí demostrar la darrera de les afirmacions de Weil que restava provar (la *hipòtesi de Riemann*) sense fer ús de les conjectures estàndard formulades per Grothendieck. Encara avui les conjectures estàndard resten obertes en la seva majoria i hi ha qui pensa que el fet d'haver-les volgut emprar en la demostració de les conjectures de Weil en retardà uns quants anys la demostració.

A més, en la demostració de Deligne fou també suficient l'ús de la cohomologia ℓ-àdica. Cal remarcar que aquesta es comporta bé en tots els primers ℓ diferents de la característica p del cos de definició de l'esquema. Amb anterioritat al treball de Deligne, s'havien introduït certes cohomologies, com ara la cohomologia cristal·lina, que tendien a posar remei al «defecte» de la cohomologia ℓ-àdica quan $\ell = p$.

Els ingredients principals de la demostració de Deligne a [10] són:

1. La cohomologia *étale* d'esquemes, segons el model desenvolupat per Grothendieck en el SGA 4 (cf. SGA $4\frac{1}{2}$[12]).

2. El tractament cohomològic de les funcions zeta, segons el model de Grothendieck, a les quals aplica una idea emprada per Rankin [29] en el seu treball sobre l'acotació del mòdul dels coeficients de la funció τ de Ramanujan.

3. La teoria de la monodromia, segons el model construït per Lefschetz a [26], però traslladat al marc de la cohomologia ℓ-àdica dels esquemes definits sobre cossos finits (cf. SGA 7 [21], [12], SGA $4\frac{1}{2}$ [12]).

Un esbós de la prova de Deligne

Sigui $X_0|\mathbb{F}_q$ una varietat projectiva i no singular i sigui X el seu canvi de base a una clausura algebraica $\overline{\mathbb{F}}_q$ del cos finit $\mathbb{F}_q$. Sigui $F\colon X \to X$

el morfisme de Frobenius, definit per $x \mapsto x^q$ sobre les coordenades dels punts de X i sigui $F^*\colon H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ l'aplicació lineal induïda sobre els espais vectorials de cohomologia ℓ-àdica de X, on ℓ és un primer qualsevol diferent de p. Atès que, pel teorema de racionalitat de Grothendieck, sabem que

$$Z(X_0,t) = \prod_i \det(1 - F^*t; H^i(X,\mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}},$$

per conèixer la situació dels zeros i dels pols de la funció zeta, en la forma predita per Weil, n'hi ha prou a provar que els valors propis de F^* en operar en $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ són nombres algebraics els conjugats complexos dels quals són de valor absolut $|\alpha| = q^{i/2}$. Un càlcul senzill mostra que aquesta afirmació implica, al mateix temps, que els polinomis característics $\det(1-F^*t; H^i(X,\mathbb{Q}_\ell))$ són de coeficients enters i independents de ℓ.

Sense restricció, es pot suposar en la demostració que la varietat X_0 és absolutament irreductible i que $0 \le i \le d$, essent d la dimensió de X_0. Això és conseqüència de la dualitat de Poincaré en cohomologia ℓ-àdica: la forma bilineal deduïda del cup producte

$$\mathrm{Tr}(x \cup y)\colon H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \times H^{2n-i}(X,\mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

és no degenerada i compatible amb l'acció de l'homomorfisme de Frobenius. Així, si α_j són els valors propis del Frobenius operant en $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$, $q^n\alpha_j^{-1}$ ho són quan opera en $H^{2n-i}(X,\mathbb{Q}_\ell)$ i, per tant, ens podem restringir als valors propis quan i és un enter comprès entre 0 i n.

Deligne veu que n'hi ha prou a fer la demostració en el cas $i = n$. Això resulta del teorema dèbil de Lefschetz (vàlid en aquest context) segons el qual, si $Y = H \cap X$ és una secció de X per un hiperplà H, l'homomorfisme canònic

$$H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^i(Y,\mathbb{Q}_\ell)$$

és un isomorfisme quan $i < d-1$ i és injectiu quan $i = d-1$. Atès que la demostració procedeix per inducció sobre la dimensió de X_0, es pot suposar que $i = n$.

Una nova reducció li permet limitar-se al cas de les varietats de dimensió n parella. Per a aquestes, basta provar que si α és un valor propi de F^* en operar en $H^n(X,\mathbb{Q}_\ell)$, aleshores α és un nombre algebraic el valor absolut del qual satisfà les desigualtats

$$q^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \le |\alpha| \le q^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}.$$

El fet que d'aquests se'n segueixi la igualtat $|\alpha| = q^{n/2}$ resulta aleshores de la fórmula de Künneth, en el context de la cohomologia ℓ-àdica, que relaciona, com d'habitud, la cohomologia de dues varietats amb la del seu producte. En efecte, si X és de dimensió n, aleshores, per a tot enter $k > 0$, α^k serà un valor propi de F^* en operar en $H^{kn}(X^k,\mathbb{Q}_\ell)$. Si k és parell, podrem escriure, en virtud de la desigualtat anterior, que

$$q^{\frac{kn}{2}-\frac{1}{2}} \le |\alpha^k| \le q^{\frac{kn}{2}+\frac{1}{2}},$$

d'on

$$q^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2k}} \le |\alpha| \le q^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}},$$

amb la qual cosa s'obté que $|\alpha| = q^{n/2}$ en fer tendir k a l'infinit.

Després d'aquestes reduccions, el teorema que cal provar és el següent.

Teorema 0.1 *Sigui X_0 una varietat projectiva, no singular, absolutament irreductible i de dimensió parella d definida sobre $\mathbb{F}_q$. Si α és un valor propi de F^* en operar en $H^d(X,\mathbb{Q}_\ell)$, aleshores α és un nombre algebraic els conjugats complexos del qual, representats també per α, satisfan que*

$$q^{\frac{d-1}{2}} \le |\alpha| \le q^{\frac{d+1}{2}}.$$

La idea de Deligne per provar el teorema és absolutament brillant: en lloc de provar el teorema per a una varietat (de la qual no en coneix res) considera tota una família de varietats (el feix de Lefschetz) que li proporcionaran la informació que necessita.

Sigui $\mathbb{P}_N$ l'espai projectiu de dimensió N sobre $\overline{\mathbb{F}}_q$ i sigui $\check{\mathbb{P}}_N$ l'espai projectiu dual. Per a cada punt t de $\check{\mathbb{P}}_N$, representem per H_t l'hiperplà de $\mathbb{P}_N$ definit per t. Si A és un subespai vectorial de codimensió 2 de $\mathbb{P}_N$ (l'eix), els hiperplans que contenen A es parametritzen per mitjà de la recta dual $D \subset \check{\mathbb{P}}_N$. Els hiperplans $(H_t)_{t\in D}$ són, per definició, el feix d'eix A. Prendrem N prou gran de manera que existeixi una immersió tancada de X en $\mathbb{P}_N$.

Sigui $\widetilde{X} = \{(x,t) \in X \times D | x \in H_t\}$. Les projeccions respectives (π, f) proporcionen un diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \leftarrow & \widetilde{X} \\ & \downarrow \\ & D \end{array}$$

Per a cada element $t \in D$, la fibra $f^{-1}(t) = X \cap H_t$ és una secció hiperplana, que representarem per X_t. La família d'aquestes seccions es diu que forma un feix de Lefschetz quan se satisfan les condicions

1. L'eix A talla X transversalment.
2. Existeix un conjunt finit S de punts de D tals que sobre $D \backslash S$, el morfisme f és llis.
3. En els punts $s \in S$, les fibres X_s presenten, com a única singularitat, punts quadràtics ordinaris.

Sota aquestes condicions, $\widetilde{X}$ és no singular i s'obté a partir de X per esclatament de l'eix $A \cap X$. Es demostra que un feix com aquest sempre existeix si es pren N suficientment gran. Sense restricció es pot suposar també que $\widetilde{X}$ i els punts de S estan definits sobre $\mathbb{F}_q$.

El fet que $\widetilde{X}$ s'obtingui a partir de X per esclatament d'una subvarietat llisa de codimensió 2, $A \cap X$, implica que

$$H^i(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{i-2}(X \cap A, \mathbb{Q}_\ell),$$

essent la descomposició compatible amb l'acció del Frobenius. És a dir, $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow H^i(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, per la qual cosa basta provar el teorema per als valors propis α de F^* operant en $H^d(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Atès que F^* també respecta la successió espectral de Leray de f,

$$E_2^{p,q} = H^p(D, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H^{p+q}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell),$$

n'hi ha prou a demostrar el teorema per als valors propis de F^* operant en els espais vectorials

$$H^p(D, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell)$$

per a $p+q = d$. Així, els termes que cal estudiar són $E_2^{2,n-1}$, $E_2^{0,n+1}$, $E_2^{1,n}$, on $n = d-1$.

La part més difícil de la prova és aquella que estudia el mòdul dels valors propis de l'endomorfisme de Frobenius en actuar sobre el terme

$$E_2^{1,n} = H^1(D, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell).$$

Siguin $U = D \backslash S$ i $u \in U$. El grup fonamental $\pi_1(U, u)$ opera en $H^n(X_u, \mathbb{Z}_\ell)$. La teoria de la monodromia descriu aquesta acció en funció dels cicles evanescents

$$\delta_s \in H^n(X_u, \mathbb{Z}_\ell), \quad s \in S.$$

Concretament, la fórmula de Picard-Lefschetz, traslladada al marc de la cohomologia ℓ-àdica estableix que

$$\gamma_s(x) = x \pm (x, \delta_s)\delta_s,$$

on $\{\gamma_s\}$ denota un sistema escaient de generadors de π_1.

Els cicles evanescents generen un subespai vectorial $E \subset H^n(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$ en què opera π_1. Això fa possible definir un feix localment constant $\mathcal{E}$ sobre U tal que $\mathcal{E} \subset R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$. Ara, successions exactes del tipus

$$H^1(D, j_*\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(D, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H^1(D, j_*\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(D, j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)),$$

on $j\colon U \to D$ és la inclusió, redueixen el problema (en el cas difícil) a l'acotació dels valors propis de F^* en operar en $H^1(D, j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp))$. Siguin $\mathcal{F} = \mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp$ i $\mathcal{F}_0$ el feix definit sobre $\mathbb{F}_q$ del qual $\mathcal{F}$ procedeix (no hi ha cap problema a estendre el cos base, si cal).

Dos punts esdevenen ara essencials en la demostració: l'anomenat per Deligne teorema de racionalitat, segons el qual per a tot $x \in |U_0|$, el polinomi

$$P_x(t) = \det(1 - F_x^* t, \mathcal{F}_0)$$

és de coeficients racionals, i el teorema que prova que els mòduls dels valors propis α de F^* en operar en $H^1(D, j_*\mathcal{F})$ estan correctament fitats.

Deligne demostra el teorema de racionalitat a còpia d'incloure el polinomi $P_x(t)$ en l'expressió de la funció zeta $Z(X_x, t)$ que, pel teorema de racionalitat de Grothendieck, és de coeficients racionals. Això no li garanteix que el polinomi $P_x(t)$, que d'entrada és de coeficients ℓ-àdics, sigui de coeficients racionals atès que es podrien donar cancel·lacions. Un argument tipus Txebotarev, que empra densitats, li permet veure que disposa d'elements suficients per deduir la racionalitat dels coeficients del polinomi $P_x(t)$, per a tot x.

Important en aquest punt és l'estudi de la representació de la monodromia en els cicles

evanescents, un argument de Kajdan i Margulis (aquest darrer, medalla Fields el 1978) sobre xarxes en grups de Lie permet concloure que la representació de la monodromia dóna lloc a un subgrup obert del grup simplèctic; és a dir, la seva imatge és el més gran possible. Amb aquesta informació Deligne pot passar a utilitzar resultats de Hermann Weyl sobre les representacions irreductibles dels grups de Lie clàssics.

Deligne ara pot demostrar que $\alpha^{-2k/\mathrm{gr}(x)}$ és un pol de la funció meromorfa $\det(1 - F_x^* t^{\mathrm{gr}(x)}, \otimes^{2k}\mathcal{F})^{-1}$. Una acotació del seu radi de convergència, possible per tractar-se d'una sèrie formal de coeficients positius, li permet obtenir, en fer créixer k cap a l'infinit, l'acotació correcta per a $|\alpha|$.

Coda

En una entrevista concedida amb motiu de la concessió del premi Abel, Deligne recorda que, en els anys setanta, Grothendieck li recomanà la lectura de l'*Analysis situs* de Lefschetz, i que Serre, per la seva banda, li recomanà l'estudi de l'article de Rankin [29]. En aquest article, Rankin havia aconseguit demostrar que $|\tau(n)| = O(n^{29/5})$. En el camí que finalment va emprendre per cloure la demostració de les conjectures de Weil, Deligne explica que també fou important una observació de Langlands del fet que la hipòtesi de Riemann per a varietats sobre cossos finits podria obtenir-se com a conseqüència de l'estudi de les singularitats d'infinites funcions L.

Amb tot, cal dir que l'article que hem comentat no és avui dia l'article de Deligne més citat. Segons la base de dades MathSciNet, avui per avui l'article de Deligne amb més cites és el treball BBD [4], conjunt amb Beilinson i Bernstein, sobre feixos perversos (article en què s'afirma que «un feix pervers ni és un feix ni és pervers»).

És realment un encert que la institució del premi Abel permeti a la comunitat matemàtica reconèixer la vàlua i l'esforç de contribucions de tota una vida, complementant d'aquesta manera el reconeixement propi de les medalles Fields, dedicades a posar de manifest els inicis de carreres especialment brillants.

Referències

[1] Artin, E.: «Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen». I, II. *Math. Z.* 19 (1924), n. 1, 153–206, 207–246.

[2] Bayer, P.: «Sobre una llibreta d'apunts (Ramanujan)». *Butll. Soc. Catalana Mat.* 1 (1986), 7–13.

[3] Bayer, P; Guàrdia, J.; Travesa, A.: *Arrels germàniques de la matemàtica contemporània.* Institut d'Estudis Catalans, 2012. ISBN: 978-84-996511-9-4.

[4] Beilinson, A. A.; Bernstein, J.; Deligne, P.: «Faisceaux pervers. Analysis and topology on singular spaces, I» (Luminy, 1981), 5–171, *Astérisque*, 100, Soc. Math. France, París, 1982.

[5] Deligne, P.: «Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 35 (1968), 259–278.

[6] Deligne, P.: «Équations différentielles à points singuliers réguliers». *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 163. Springer-Verlag, Berlín-Nova York, 1970. iii+133 p.

[7] Deligne, P.: «Théorie de Hodge. I». *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Tom 1, p. 425–430. Gauthier-Villars, París, 1971.

[8] Deligne, P.: «Théorie de Hodge. II». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 40 (1971), 5–57.

[9] Deligne, P.: «Formes modulaires et représentations de GL(2). Modular functions of one variable, II.» (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), p. 55–105. *Lecture Notes in Math.*, vol. 349, Springer, Berlín, 1973.

[10] Deligne, P.: «La conjecture de Weil. I». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 43 (1974), 273–307.

[11] Deligne, P.: «Théorie de Hodge. III». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 44 (1974), 5–77.

[12] Deligne, P.: «Cohomologie étale. Séminaire de Géométrie Algébrique

du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier». *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 569. Springer-Verlag, Berlín-Nova York, 1977. iv+312 p.

[13] Deligne, P.: «La conjecture de Weil. II». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 52 (1980), 137–252.

[14] Deligne, P.; Lusztig, G.: «Representations of reductive groups over finite fields». *Ann. of Math.* (2) 103 (1976), n. 1, 103–161.

[15] Deligne, P.; Mumford, D.: «The irreducibility of the space of curves of given genus». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 36 (1969), 75–109.

[16] Deligne, P.; Rapoport, M.: «Les schémas de modules de courbes elliptiques. Modular functions of one variable, II» (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), p. 143–316. *Lecture Notes in Math.*, vol. 349, Springer, Berlín, 1973.

[17] Deligne, P.; Serre, J.-P.: «Formes modulaires de poids 1». *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 7 (1974), 507–530 (1975).

[18] Faltings, G.: «Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern». *Invent. Math.* 73 (1983), n. 3, 349–366.

[19] Gross, Benedict H.; Zagier, Don B.: «Heegner points and derivatives of L-series». *Invent. Math.* 84 (1986), n. 2, 225–320.

[20] Grothendieck, A.; Artin, M.; Verdier, J. L. (eds.): «SGA 4, Théorie des topos et cohomologie étale des schemas». *Lecture Notes in Math.*, vol. 269, Springer, Berlín, 1972; *Lecture Notes in Math.*, vol. 270, Springer, Berlín, 1972; *Lecture Notes in Math.*, vol. 305, Springer, Berlín, 1973.

[21] Grothendieck, A.; Deligne, P.; Katz, N. (eds.): «SGA 7 Groupes de monodromie en geométrie algébrique». *Lecture Notes in Math.*, vol. 288, Springer, Berlín, 1972; *Lecture Notes in Math.*, vol. 340, Springer, Berlín, 1973.

[22] Hurwitz, A.: «Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip». *Math. Ann.* 28 (1887), n. 4, 561–585.

[23] Kleiman, S. L.: «Algebraic cycles and the Weil conjectures». *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, p. 359–386. North-Holland, Àmsterdam; Masson, París, 1968.

[24] Lamotke, K.: «The Topology of Complex Projective Varieties after S. Lefschetz». *Topology* 20 (1981), 15–51.

[25] Lefschetz, S.: «On the fixed point formula». *Ann. of Math.* (2) 38 (1937), n. 4, 819–822.

[26] Lefschetz, S.: *L'analysis situs et la géométrie algébrique.* Gauthier-Villars, París, 1924, reimp. 1950. vi+154 p.

[27] Mazur, B.: «Modular curves and the Eisenstein ideal». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 47 (1977), 33–186 (1978).

[28] Mazur, B.; Wiles, A.: «Class fields of abelian extensions of Q». *Invent. Math.* 76 (1984), n. 2, 179–330.

[29] Rankin, R. A.: «Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function $\sum \tau(n)/n^s$ on the line $\Re s = 13/2$. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms». *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 35 (1939), 351–372.

[30] Rankin, R. A.: «Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. III. A note on the sum function of the Fourier coefficients of integral modular forms». *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 36 (1940). 150–151.

[31] Taylor, R.; Wiles, A.: «Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras». *Ann. of Math.* (2) 141 (1995), n. 3, 553–572.

[32] Weil, A.: «Sur les fonctions algebriques à corps de constantes fini». *C. R. Acad. Sci. París* 210 (1940), 592–594

[33] Weil, A.: *Foundations of Algebraic Geometry.* American Mathematical Society

Colloquium Publications, vol. 29. American Mathematical Society, Nova York, 1946. xix+289 p.

[34] Weil, A.: *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*. Actualités Sci. Ind., n. 1041 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 7 (1945). Hermann et Cie., París, 1948. iv+85 p.

[35] Weil, A.: *Variétés abéliennes et courbes algébriques*. Actualités Sci. Ind., n. 1064 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 8 (1946). Hermann et Cie., París, 1948. 165 p.

[36] Weil, A.: «Numbers of solutions of equations in finite fields». *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), 497–508.

[37] Wiles, A.: «Modular elliptic curves and Fermat's last theorem». *Ann. of Math.* (2) 141 (1995), n. 3, 443–551.

Pilar Bayer
Universitat de Barcelona

Informació de diferents convocatòries de premis

La Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) ha convocat la tercera edició del premi Albert Dou (2014), que s'ofereix a aquells treballs que contribueixin a fer visible la importància de la matemàtica en el nostre món, a transmetre el coneixement matemàtic a un públic més ampli que els mateixos especialistes i a promoure tot allò que pugui ajudar a l'extensió del prestigi de la matemàtica a la nostra societat. La dotació del premi és de 2.500 euros. El termini d'admissió de candidatures és el maig de 2014 i el premi es lliurarà a l'Assemblea General de la SCM a finals de 2014. Per a més informació podeu anar a: `http://blocmat.ub.edu/2013/11/13/la-scm-convoca-el-premi-albert-dou-2014/`.

El desembre de 2013 s'acaba el termini d'admissió de candidatures per al premi Évariste Galois 2013 i es farà entrega del premi a l'acte dels premis Sant Jordi de l'Institut d'Estudis Catalans, l'abril de 2014. A la *SCM/Notícies* n'informarem puntualment, tant de l'acte com del guanyador. Per a més informació podeu anar a `http://blogs.iec.cat/scm/premis/premi-evariste-galois/`.

Parlem de llibres

La decisió de Manperel, de Jordi de Manuel

La decisió de Manperel, de l'escriptor barceloní i doctor en Biologia Jordi de Manuel (1962), ha estat l'obra guardonada enguany amb el premi Ciutat de Tarragona Pin i Soler de narrativa. No és habitual que una novel·la de gènere rebi un reconeixement d'aquestes característiques, de manera que ens podem felicitar pel fet que, tal vegada, alguna cosa estigui canviant en el nostre panorama literari, si més no en relació amb certs prejudicis que, a hores d'ara, haurien d'haver quedat definitivament obsolets.

Amb *La decisió de Manperel*, Jordi de Manuel s'allunya de la sèrie policíaca de l'inspector Marc Sergiot (que, fins avui, consta de set novel·les i alguns relats breus) per endinsar-se en un món que l'apassiona, el de la ciència-ficció. No debades l'autor és un membre actiu de la Societat Catalana de Ciència Ficció i Fantasia. *La decisió de Manperel* no representa la seva primera incursió en el gènere. Només hem de recordar la novel·la intitulada *El cant de les dunes* (Pagès Edicions, 2006) o un bon nombre de relats, inclosos en diversos reculls